# Übung 5

Ben Hermann
Christoph Reeg

29. Juni 2004

# 1. Simplextableau

## a). mit Kleinster-Index-Regel für Spaltenpivot

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | -24 | -80 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | $\frac{1}{4}$ | 9 | -8 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | -$\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 | -12 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Wir bezeichnen dieses Tableau mit $T_0$. Eine Basis dieses Tableaus ist $B_0 = (5, 6, 7)$, somit ist $N_0 = (1, 2, 3, 4)$.

### a).1. Schritt: Lösung optimal?

Die Lösung ist bisher nicht optimal, da Teile der Kostenzeile noch größer 0 sind.

### a).2. Schritt: Pivotspalte

Zunächst wird eine Pivotspalte gewählt. Dies ist der kleinste Index dessen Kosten größer als 0 sind. Dies ist die erste Spalte. Also $s = 1$.

### a).3. Schritt: Test auf Beschränktheit

Die Elemente dieser Spalte sind nicht alle kleiner gleich null, also kann keine Aussage über die Unbeschränktheit getroffen werden.

### a).4. Schritt: Pivotzeile

$\theta = 0$, da $\bar{b}_1$ (und auch $\bar{b}_2$) 0 ist. Somit muß $r$ aus $\{1, 2\}$ sein. Da wir hier die Kleinster-Index-Regel verwenden ist $r = 1$.

### a).5. Schritt: Neue Basis

Die neue Basis bestimmt sich nun leicht:
$B_1 = (1, 6, 7)$ und $N_1 = (5, 2, 3, 4)$.

### a).6. Schritt: Berechnung des neuen Tableaus

Nach den Berechnungsregeln von Folie 195 ergibt sich folgendes Tableau:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | -6 | -96 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -$\frac{1}{4}$ | -9 | 8 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{3}{8}$ | -$\frac{3}{2}$ | -8 | -$\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 9 | -8 | 1 | 0 | 1 |

Dieses Tableau nennen wir $T_1$.

Bei der weiteren Betrachtung wird aus Platzgründen auf die detailierte Ausformulierung der Schritte verzichtet. Es handelt sich um den selben Gedankengang.

$s = 2$, $r = 1$, $B_2 = (2, 6, 7)$ und $N_2 = (5, 1, 3, 4)$.

$T_2 =$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 14 | 0 | -132 | 16 | -12 | 0 | 0 |
| 0 | -4 | 1 | 36 | -32 | 4 | 0 | 0 |
| 0 | $\frac{3}{2}$ | 0 | -15 | 4 | -2 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$s = 1$, $r = 1$, $B_3 = (5, 6, 7)$ und $N_3 = (2, 1, 3, 4)$.

$T_3 =$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{7}{2}$ | -6 | -96 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | -$\frac{1}{4}$ | -9 | 8 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{3}{8}$ | -$\frac{3}{2}$ | -8 | -$\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 9 | -8 | 1 | 0 | 1 |

Dieses Tableau ist aber nun wieder gleich $T_1$. Da hier die gleichen Regeln angewendet werden, werden wir als $T_4$ wieder $T_2$ erhalten. Also entsteht ein Zyklus.

## b). mit Steilster-Anstieg Regel für Spaltenpivot

Wir gehen wieder vom selben Tableau aus:

$T_0 =$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | -24 | -80 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | $\frac{1}{4}$ | 9 | -8 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | -$\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 | -12 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$B_0 = (5, 6, 7)$, $N_0 = (1, 2, 3, 4)$

Das Spaltenpivot wird nun aber nach der neuen Regel bestimmt:
$s$ ist aus der Menge der Spalten mit positiven Kosten, so dass die Kosten in der Spalte s die größten Kosten im Tableau sind. Dies ist in diesem Fall die Spalte 2. Also $s = 2$.
Das Zeilenpivot wird wie gewohnt, über die Kleinster-Index-Regel bestimmt. Da-

her $r = 1$. Daraus folgt:
$B_1 = (2, 6, 7),\ N_1 = (1, 5, 3, 4)$

$$T_1 = \begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
0 & 14 & 0 & -132 & 16 & -12 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -4 & 1 & 36 & -32 & 4 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & 0 & -15 & 4 & -2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$s = 4,\ r = 1,\ B_2 = (4, 6, 7),\ N_2 = (1, 5, 3, 2)$

$$T_2 = \begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
0 & 12 & \frac{1}{2} & -114 & 0 & -10 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{32} & -\frac{9}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{21}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$s = 1,\ r = 1,\ B_3 = (1, 6, 7),\ N_3 = (4, 5, 3, 2)$

$$T_3 = \begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
0 & 0 & \frac{7}{2} & -6 & -96 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & -\frac{1}{4} & -9 & 8 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{2} & -8 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
1 & 0 & \frac{1}{4} & 9 & -8 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$s = 2,\ r = 1,\ B_4 = (5, 6, 7),\ N_4 = (4, 1, 3, 2)$

$$T_4 = \begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
0 & 14 & 0 & -132 & 16 & -12 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -4 & 1 & 36 & -32 & 4 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & 0 & -15 & 4 & -2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$T_4 = T_1$. Somit erhalten wir wieder einen Zyklus.

## c). Abschließende Bemerkung

In diesem Fall zeigt sich, daß durch die Kleinster-Index-Regel bei der Zeilenpivotwahl in Verbindung mit den beiden Nullen in b immer nur der erste Index der Basis geändert wird.

# 2. Aussagen zu LPs

## a).

Ja, dies ist möglich. Das kann man zum Beispiel in unserer Lösung zu Aufgabe 1a beim Übergang von $T_2$ auf $T_3$ sehen.

## b).

Auch dies ist möglich. Zum sehen ebenfalls in der Lösung zu Aufgabe 1a beim Übergang von $T_1$ auf $T_2$. Beide Aussagen hängen stark von der Wahl des Pivotelements ab. Da hier verschiedene Regeln denkbar sind, sind auch Regeln möglich die diese Elemente auswählen. Es kann jetzt lediglich noch sein, daß die Mengen aus denen Pivotzeile und -spalte ausgewählt werden, die entsprechenden Elemente nicht enthalten. Wenn sich z.B. die erste Zeile wie im vorliegenden Beispiel durch eine 0 in $b$ immer in der Menge der zulässigen Zeilen befindet und sich das Spaltenpivot entsprechend verhält sind solche Übergänge möglich. Die 2 wechselt im Beispiel durch die Wahl von $s = 2$ und $r = 1$ im Schritt von $T_1$ nach $T_2$ von der Basis in die Nicht-Basis und wird dann im Schritt von $T_2$ auf $T_3$ wieder durch $s = 1$ und $r = 1$ in die Basis zurückgebracht.

## c).

Da zwischen $x^1$ und $x^2$ nur ein Simplex-Schritt steht, wird auch exakt eine Basisvariable ausgetauscht um von $x^2$ auf $x^1$ zu gelangen.

## d).

# 3. Primale und Duale Schranken

## 1). Primale Schranke

Die primale Schranke ist eine möglichst gute zulässige Lösung. Unsere Überlegung zur Erstellung einer solchen Lösung: Ermittle den Nutzen/Kosten-Faktor für jedes $x_i$. Wähle nun das $x_i$ mit größten Nutzen/Kosten-Faktor und erhöhe es so lange, wie die Bedingung noch erfüllt ist. Dann mache mit dem nächstbesten $x_i$ weiter.

Die Tabelle der Nutzen/Kosten-Faktoren:

| | |
|---|---|
| $x_1$ | $42/14 = 3$ |
| $x_2$ | $26/10 = 2,6$ |
| $x_3$ | $35/12 = 2,9$ |
| $x_4$ | $71/25 = 2,8$ |
| $x_5$ | $5/2 = 2,5$ |

In der 1. Spalte sind die Werte für $x$, in der 2. Spalte der resultiernde Wert für die Bedingung und der Rest (69-2.Spalte) steht in der 3. Spalte.

| | | |
|---|---|---|
| $x_1 = 4$ | $4 * 14 = 56$ | 13 |
| $x_3 = 1$ | $56 + 1 * 12 = 68$ | 1 |

Damit kommen wir $x = (4, 0, 1, 0, 0)$ und auf einen Zielfunktionswert von $4 * 42 + 1 * 35 = 203$.

## 2). Duale Schranke

Die duale Schranke ist eine Abschätzung nach oben, z.B. durch Relaxierung von Nebenbedingungen. Wir haben uns für die Nebenbedingung $\mathbb{Z}^5_{\leq 0}$ entschieden und sie auf $\mathbb{R}^5_{\leq 0}$ entschärft.

Damit beträgt $x = (\frac{69}{14}, 0, 0, 0, 0)$ und der Zielfunktionswert $69/14 * 42 = 207$.

## 3). Abschließende Bemerkung

Damit liegt der optimale Zielfunktionswert zwischen 203 und 207. D.h. wir haben einen maximalen Fehler von $207 - 203 = 4$, das ist unter 2% und zeigt, das unsere Schranken relativ gut sind.